

线代老师：下面给出 A 的左零空间定义：

$$\mathcal{N}(A^\top) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y^\top A = 0\}.$$

我：哦，这个看上去应该比较简单，所以有什么用呢？

线代老师：如果 $PA = LU$ ，令 $r = \text{rank}(A)$ ，那么

$$\text{span}\{e_i^\top L^{-1}P: i = r + 1, \dots, m\} = \mathcal{N}(A^\top),$$

也就是说 $L^{-1}P$ 的最后 $m - r$ 行恰好构成了 A 的左零空间的基，这个好理解吧？

我：（沉默1min）嗯，好像是这样

线代老师：快下课了，我们再介绍两个左零空间的重要结论：

$$\mathcal{N}(A^\top) = \text{Col}(A)^\perp \tag{1}$$

如果 $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ，那么

$$\dim(\text{Im}(T_A)) + \dim(\ker(T_A)) = \dim(\mathbb{R}^n) = n \tag{2}$$

第一个正交的几何意义应该很直观，第二个是在线性变换中的 *rank-nullity theorem*...

我：。。。

$$\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$$